6 Dinamika

ATARIAN

- Gorputzetan egindako indarrak bi motatako higidurak eragin ditzake: translazio-higidura eta biraketa-higidura (indar bikote batek sorrarazia, esate baterako); lehen kasuan, gorputza posizioz aldatzen da denboran, eta bigarrenean, biratu egiten da.

  Gorputz batean aplikatutako indar batek, gorputza higiarazi ez ezik, deformatu ere egin dezake.

- Inertzia materiaren propietate bat, haren pausagune-nahiz higidura-egoera aldatzea eragozten edo galarazten duena.

- Datuak: $\vec{F}_1 = (3\,\vec{i} - 4\,\vec{j})$ N ; $\vec{F}_2 = (-2\,\vec{i} - 3\,\vec{j})$ N

  $\vec{F}_3 = (4\,\vec{i} + 2\,\vec{j})$ N

  Erresultantea kalkulatuko dugu:

  $$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 =$$
  $$= (3\,\vec{i} - 4\,\vec{j} - 2\,\vec{i} - 3\,\vec{j} + 4\,\vec{i} + 2\,\vec{j})\text{ N} = (5\,\vec{i} - 5\,\vec{j})\text{ N}$$

- Datuak: $F = 40$ N ; $\alpha = 60°$

  $F_x = 40\text{ N} \cos 60° = 20$ N

  $F_y = -40\text{ N} \sin 60° = -34{,}6$ N

  $F = (20\,\vec{i} - 34{,}6\,\vec{j})$ N

INDARRAK ETA HIGIDURA

1. Gorputz horren gainean indar batek ere ez eragitea, edo eragiten duten indarren erresultantea nulua izatea.

2. Datuak: $F = 125$ N ; m = 20 kg

   a) $F = ma$

   $$a = \frac{F}{m} = \frac{125\text{ N}}{20\text{ kg}} = 6{,}25\text{ m/s}^2$$

   b) Higidura zuzen uniformeki azeleratuaren formula aplikatuko dugu:

   $$x = \frac{1}{2}\,at^2$$

   $$x = \frac{1}{2}\,6{,}25\,\frac{\text{m}}{\cancel{\text{s}^2}}\,(5\,\cancel{\text{s}})^2 = 78{,}1\text{ m}$$

3. Datuak: $m = 20$ kg ; $\Delta v = v - v_0 = 10$ m/s

   $t = 2$ s ; $v_0 = 25$ m/s

   Gorputzaren azelerazioa kalkulatuko dugu:

   $$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2\text{ s}} = 5\text{ m/s}^2$$

   Ondoren, aplikaturiko indarra kalkulatuko dugu:

   $$F = m\,a = 20\text{ kg} \cdot 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 100\text{ N}$$

   Azkenik, zinematikaren ekuazioak erabiliko ditugu gorputzaren abiadura kalkulatzeko:

   $$v = v_0 + a\,t$$

   $$v = 25\,\frac{\text{m}}{\text{s}} + 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^{\cancel{2}}} \cdot 0{,}5\,\cancel{\text{s}} = 27{,}5\text{ m/s}$$

4. Datuak: $m_1 = 75$ kg ; $m_2 = 60$ kg ; $\vec{F}_{21} = 150\,\vec{i}$ N

   Akzio-erreakzioaren printzipioaren arabera:

   $$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = -150\,\vec{i}\text{ N}$$

   Azelerazioak kalkulatuko ditugu:

   $$\vec{F}_{21} = m_1\,\vec{a}_1\ ;\ \vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_{21}}{m_1} = \frac{150\,\vec{i}\text{ N}}{75\text{ kg}} = 2\,\vec{i}\text{ m/s}^2$$

   $$\vec{F}_{12} = m_2\,\vec{a}_2$$

   $$\vec{a}_2 = \frac{\vec{F}_{12}}{m_2} = \frac{-\vec{F}_{21}}{m_2} = -\frac{150\,\vec{i}\text{ N}}{60\text{ kg}} = -2{,}5\,\vec{i}\text{ m/s}^2$$

   Hona hemen bi azelerazioen moduluak: 2 m/s² eta 2,5 m/s²

BULKADA ETA MOMENTU LINEALA

5. Datuak: $F = 150$ N ; $\Delta t = 1$ s ; m = 6 kg ; $v_0 = 0$ m/s

   Lehenik, bulkadaren modulua kalkulatuko dugu:

   $$I = F\,\Delta t = 150\text{ N} \cdot 1\text{ s} = 150\text{ N·s}$$

   Ondoren, bulkadaren teorema erabiliz, gorputzaren amaierako abiadura kalkulatuko dugu:

$$\vec{F}\Delta t = m\vec{v} - m\vec{v}_0$$

$$F\Delta t\vec{i} = m v\vec{i} - m v_0 \vec{i}$$

$$F\Delta t = mv - mv_0$$

$$v = \frac{F\Delta t + mv_0}{\text{m}} =$$

$$= \frac{150 \text{ N} \cdot 1 \text{ s} + 6 \text{ kg} \cdot 0 \dfrac{\text{m}}{\text{s}}}{6 \text{ kg}} = 25 \text{ m/s}$$

6. Datuak: $m_1 = 225$ g ; $v_{01} = 10$ m/s

$m_2 = 175$ g ; $v_{02} = 0$ m/s ; $v_2 = 9$ m/s

Momentu lineala kontserbatu egiten da, diharduten indarretatik bat ere ez delako bolen sistematik kanpokoa.

$$m_1\vec{v}_{01} + m_2\vec{v}_{02} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

Lehenik, hasierako momentu lineala kalkulatuko dugu:

$$m_1\vec{v}_{01} + \cancel{m_2\vec{v}_{02}} =$$

$$= 0{,}225 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\vec{i} = 2{,}25 \text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}\vec{i}$$

Amaierako momentu lineala honako hau izango da:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = 0{,}225 \text{ kg}\,\vec{v}_1 + 0{,}175 \text{ kg} \cdot 9\,\vec{i}\,\text{m/s}$$

Momentu linealaren kontserbazioaren ekuazioa idatziko dugu, bere osagaietan bananduta:

$$m_1\vec{v}_{01} + m_2\vec{v}_{02} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

$$2{,}25 \text{ kg}\cdot m\cdot\text{s}^{-1}\vec{i} =$$

$$= 0{,}225 \text{ kg} \cdot v_1\vec{i} + 1{,}575 \text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}\vec{i}$$

$$2{,}25 \text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1} = 0{,}225 \text{ kg}\; v_1 + 1{,}575 \text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

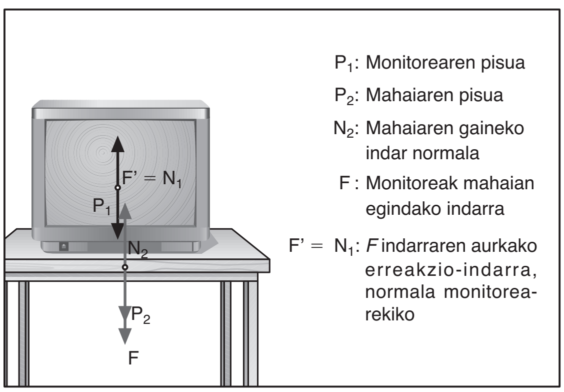
v_1 bakanduz:

$$v_1 = \frac{(2{,}25 - 1{,}575) \text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}{0{,}225 \text{ kg}} = 3 \text{ m/s}$$

Lehenengo bola bigarrenaren norabide eta noranzko berean irten da, 3 m/s-ko abiaduran.

NEWTON-EN LEGEEN APLIKAZIOAK

7.



8. Datuak: $g = 1{,}6$ m/s² ; $m = 80$ kg

$$N = P = mg = 1{,}6 \text{ m/s}^2 \cdot 80 \text{ kg} = 128 \text{ N}$$

9. Datuak: $m = 1\,200$ kg

a) $N = P = mg = 1\,200 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2} = 11\,760 \text{ N}$

b) $N = P\cos\alpha = mg\cos\alpha =$

$$= 1\,200 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \cos 30° = 10\,184\, N$$

10. Datuak: $N = 35$ N ; $\alpha = 45°$

Plano inklinatuaren gaineko indar normala:

$$N = P\cos\alpha$$

Pisua bakanduz:

$$P = \frac{N}{\cos\alpha} = \frac{35 \text{ N}}{\cos 45°} = 49{,}5 \text{ N}$$

11. Datuak: $m = 2{,}5$ kg ; $F = 10$ N ; $\beta = 45°$

a) Indar normala pisuaren eta aplikaturiko indarraren osagai bertikalaren arteko kendura izango da:

$$N = P - F\sin\beta = mg - F\sin\beta =$$

$$= 2{,}5 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 10 \text{ N} \sin 45° = 17{,}4 \text{ N}$$

b) Aulkia zorutik altxa dadin, normalak nulua izan behar du:

$$0 = P - F\sin\beta$$

$$F = \frac{P}{\sin\beta} = \frac{mg}{\sin\beta} = \frac{2{,}5 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\sin 45°} = 34{,}6 \text{ N}$$

12. Datuak: $\beta = 30°$; $F = 392$ N

Haitza lurretik altxatzeko, normalak nulua izan behar du:

$$0 = P - F\sin\beta = mg - F\sin\beta$$

Masa bakanduz:

$$m = \frac{F\sin\beta}{g} = \frac{392 \text{ N} \cdot \sin 30°}{9{,}8 \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 20 \text{ kg}$$

13. Bai.

Gorputz batek pausagune-egoeran iraun dezan, indar erresultanteak nulua izan behar du. Plano inklinatu batean hala izan dadin, aski da pisuaren osagai tangentziala marruskadura-indar estatikoa baino txikiagoa izatea.

14. Datuak: $m = 20$ kg ; $F_1 = 78{,}4$ N ; $F_2 = 39{,}2$ N

Lehenik eta behin, marruskadura-koefiziente estatikoa kalkulatuko dugu. Marruskadura-indarra gainditzeko indar minimoa 78,4 N-ekoa da. Beraz:

$$F_1 = \mu_e N = \mu_e mg$$

$$\mu_e = \frac{F_1}{mg} = \frac{78{,}4\ \text{N}}{20\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0{,}4$$

Bestalde, marruskadura-indar zinetikoa gainditzeko egin beharreko indarra 39,2 N-ekoa da. Beraz:

$$F = \mu_z mg$$

$$\mu_z = \frac{F}{mg} = \frac{39{,}2\ \text{N}}{20\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0{,}2$$

15. Gorputza abiadura konstantean jaisten ari denez, azelerazioa nulua da; beraz, indarren erresultantea nulua da. Horrek adierazten digunez, pisuaren osagai tangentziala konpentsatu egiten da marruskadura-indarrarekin. Hala, bada:

$$P_t = F_r$$

$$P \sin \alpha = \mu_z N$$

$$\mu_z = \frac{P \sin \alpha}{N} = \frac{\cancel{P} \sin \alpha}{\cancel{P} \cos \alpha} = \text{tg}\, \alpha = \text{tg}\, 31° = 0{,}6$$

16. Datuak: $\alpha = 30°$

a) Azelerazioa pisuaren osagai tangentzialaren ondorio izango da:

$$P_t = ma$$

$$\cancel{m} g \sin \alpha = \cancel{m} a$$

$$a = g \sin \alpha = 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \sin 30° = 4{,}9\ \text{m/s}^2$$

b) Indar erresultantea pisuaren osagai tangentzialaren eta marruskadura-indarraren arteko kendura da:

$$P_t - F_r = ma$$

$$mg \sin \alpha - \mu_z mg \cos \alpha = ma$$

$$\cancel{m} a = \cancel{m} g (\sin \alpha - \mu_c \cos \alpha)$$

$$a = 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (\sin 30° - 0{,}5 \cos 30°) = 0{,}66\ \text{m/s}^2$$

17. Datuak: $m_1 = 0{,}5$ kg ; $m_2 = 0{,}4$ kg

a) Atwood-en makinari egokitutako ekuazioa aplikatuko dugu:

$$a = \frac{m_1 g - m_2 g}{m_1 + m_2} = g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} =$$

$$= 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{0{,}5\ \text{kg} - 0{,}4\ \text{kg}}{0{,}5\ \text{kg} + 0{,}4\ \text{kg}} = 1{,}1\ \text{m/s}^2$$

b) Bi gorputzetako bati Newton-en bigarren legea aplikatuko diogu, eta tentsioa bakanduko dugu adierazpenean:

$$P_1 - T = m_1 a \ ; \ T = P_1 - m_1 a$$

$$T = m_1 (g - a) = 0{,}5\ \text{kg} \left(9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 1{,}1\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 4{,}3\ \text{N}$$

18. Datuak: $m_1 = 4$ kg ; $m_2 = 3$ kg ; $a = 1{,}4$ m/s²

Atwood-en makinaren ekuazioan grabitatearen azelerazioa bakanduz:

$$P_1 - P_2 = (m_1 + m_2)\, a$$

$$g(m_1 - m_2) = (m_1 + m_2)\, a$$

$$g = \frac{a(m_1 + m_2)}{m_1 - m_2} = \frac{1{,}4\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2} (4\ \text{kg} + 3\ \text{kg})}{4\ \text{kg} - 3\ \text{kg}} = 9{,}80\ \text{m/s}^2$$

19. Datuak: $m = 1\,800$ kg ; $R = 100$ m

$v = 99$ km/h $= 27{,}5$ m/s

Marruskadura-indarra indar zentripetuaren berdinada:

$$F_r = F_c = m \frac{v^2}{R} = 1\,800\ \text{kg}\ \frac{(27{,}5\ \text{m/s})^2}{100\ \text{m}} =$$

$$= 13\,612{,}5\ \text{N}$$

20. Datuak: $m = 0{,}5$ kg ; $R = 1{,}5$ m ; $v = 10$ m/s

Kasu honetan, pisuak ez du eraginik, indar konstante eta bertikal bat delako, normalarekin anulatzen dena. Beraz, indar zentripetua tentsioaren berdina da.

$$T = F_c = m \frac{v^2}{R} = 0{,}5\ \text{kg} \frac{\left(10\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{1{,}5\ \text{m}} = 33{,}3\ \text{N}$$

Tentsioaren modulua: 33,3 N.

JARDUERA ETA PROBLEMA EBATZIAK

1. Datuak: $m_1 = 70$ kg ; $\vec{v}_{01} = 10\ \vec{i}$ m/s

$m_2 = 50$ kg ; $\vec{v}_{02} = 0$

Momentu linealaren kontserbazioaren printzipioa aplikatuko dugu, kontuan hartuta talkaren ondoren bi patinatzaileak abiadura berberan higitu direla:

$$m_1 \vec{v}_{01} + m_2 \vec{v}_{02} = (m_1 + m_2)\, \vec{v}$$

$$\vec{v} = \frac{m_1 \vec{v}_{01} + \cancel{m_2 \vec{v}_{02}}}{m_1 + m_2} = \frac{70\ \text{kg} \cdot 10\ \vec{i}\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}}{(70\ \text{kg} + 50\ \text{kg})} = 5{,}8\ \vec{i}\ \text{m/s}$$

Bi patinatzaileen amaierako abiadura 5,8 m/s-koa da, hasieran lehenengoak izan duenaren norabide eta noranzko berberetan.