2. Datuak: $m_1 = 62$ kg ; $\vec{v}_{01} = 12\,\vec{i}$ m/s
$m_2 = 80$ kg ; $\vec{v}_{02} = 6\,\vec{i}$ m/s

Momentu linealaren kontserbazioaren printzipioa aplikatuko dugu, kontuan hartuz talkaren ondoren bi eskiatzaileak abiadura berean higitu direla:

$$m_1\vec{v}_{01} + m_2\vec{v}_{02} = (m_1 + m_2)\vec{v}$$

$$\vec{v} = \frac{m_1\vec{v}_{01} + m_2\vec{v}_{02}}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{62 \text{ kg} \cdot 12\,\vec{i}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} + 80 \text{ kg} \cdot 6\,\vec{i}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{(80 \text{ kg} + 62 \text{ kg})} = 8{,}6\,\vec{i} \text{ m/s}$$

Bi eskiatzaileen amaierako abiadura 8,6 m/s-koa da, hasieran lehenengoak izan duenaren norabide eta noranzko berberetan.

3. Datuak: $m_1 = m_2 = m$

- Hasierako abiadurak:

$$\vec{v}_{01} = 4{,}2\,\vec{i} \text{ m/s} \;\; ; \;\; \vec{v}_{02} = -2{,}8\,\vec{i} \text{ m/s}$$

- Amaierako abiadurak:

$$\vec{v}_1 = v_1 \cos\alpha\,\vec{i} + v_1 \sin\alpha\,\vec{j} \;;\; \alpha = 15°$$
$$\vec{v}_2 = v_2 \cos\beta\,\vec{i} + v_2 \sin\beta\,\vec{j} \;;\; \beta = 210°$$

Momentu linealaren kontserbazioaren printzipioa aplikatuz:

$$m\,\vec{v}_{01} + m\,\vec{v}_{02} = m\,\vec{v}_1 + m\,\vec{v}_2$$
$$\cancel{m}\,(\vec{v}_{01} + \vec{v}_{02}) = \cancel{m}\,(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$$

Ekuazioa bere osagaietan idatziko dugu:

$$v_{01}\,\vec{i} - v_{02}\,\vec{i} =$$
$$= v_1 \cos\alpha\,\vec{i} + v_1 \sin\alpha\,\vec{j} + v_2 \cos\beta\,\vec{i} + v_2 \sin\beta\,\vec{j}$$

x osagaia:

$$v_{01} - v_{02} = v_1 \cos\alpha + v_2 \cos\beta$$

y osagaia:

$$0 = v_1 \sin\alpha + v_2 \sin\beta$$

Hortik ekuazio-sistema hau lortuko dugu:

$$\begin{cases} v_{01} - v_{02} = v_1 \cos\alpha + v_2 \cos\beta \\ 0 = v_1 \sin\alpha + v_2 \sin\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4{,}2 - 2{,}8 = v_1 \cos 15° + v_2 \cos 210° \\ 0 = v_1 \sin 15° + v_2 \sin 210° \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1{,}4 = 0{,}9659\, v_1 - 0{,}8660\, v_2 \\ 0 = 0{,}2588\, v_1 - 0{,}5000\, v_2 \end{cases}$$

Sistemak soluzio hauek ditu:

$$v_1 = 2{,}7 \text{ m/s} \;\; ; \;\; v_2 = 1{,}4 \text{ m/s}$$

Beraz, lehenengo bola 2,7 m/s-ko moduluko abiaduran higituko da, eta bigarren bola, 1,4 m/s-ko moduluko abiaduran.

4. Datuak: $\vec{v}_0 = 383\,\vec{i}$ m/s

- Zatien abiadura:

$$\vec{v}_1 = v_1 \cos\alpha\,\vec{i} + v_1 \sin\alpha\,\vec{j} \;;\; \alpha = 20°$$
$$\vec{v}_2 = v_2 \cos\beta\,\vec{i} + v_2 \sin\beta\,\vec{j} \;;\; \beta = -30°$$

- Proiektilaren masa: M

- Zatien masa: m; $M = 2\,m$

Momentu linealaren kontserbazioaren printzipioa aplikatuz:

$$M\,\vec{v}_0 = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2$$
$$2\,m\vec{v}_0 = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2$$
$$2\,\cancel{m}\,\vec{v}_0 = \cancel{m}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \;\; ; \;\; 2\,\vec{v}_0 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

Ekuazio bektoriala bere osagaietan bananduta idatziko dugu:

$$2\,v_0\,\vec{i} =$$
$$= v_1 \cos\alpha\,\vec{i} + v_1 \sin\alpha\,\vec{j} + v_2 \cos\beta\,\vec{i} + v_2 \sin\beta\,\vec{j}$$

$$\begin{cases} 2\,v_0 = v_1 \cos\alpha + v_2 \cos\beta \\ 0 = v_1 \sin\alpha + v_2 \sin\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \cdot 383 = v_1 \cos 20° + v_2 \cos(-30°) \\ 0 = v_1 \sin 20° + v_2 \sin(-30°) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 766 = 0{,}9397\, v_1 + 0{,}8660\, v_2 \\ 0 = 0{,}3420\, v_1 - 0{,}5000\, v_2 \end{cases}$$

Sistemaren soluzioak:

$$v_1 = 500 \text{ m/s} \;\; ; \;\; v_2 = 342 \text{ m/s}$$

Beraz, lehenengo zatiaren abiaduraren modulua 500 m/s-koa da, eta bigarrenaren abiaduraren modulua, 342 m/s-koa.

5. Datuak: $m = 64$ kg ; $a = 3{,}5$ m/s^2

Newton-en bigarren legea aplikatuko dugu:

$$R = N - mg = m\,a$$

Baskulak normalaren balioa adieraziko du:

$$N = m\,(g + a) = 64 \text{ kg}\left(9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 3{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 851{,}2 \text{ N}$$

Indar normala kilopondetara bihurtuko dugu:

$$851{,}2\,\cancel{\text{N}}\,\frac{1 \text{ kp}}{9{,}8\,\cancel{\text{N}}} = 86{,}9 \text{ kp}$$

6. Datuak: $P = 280 \text{ kp} = 2\,744 \text{ N}$

$$m = \frac{P}{g} = \frac{2\,744 \text{ N}}{9{,}8 \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 280 \text{ kg}$$

$$a = 3 \text{ m/s}^2$$

Newton-en bigarren legea aplikatuz:

$$R = P - N = m\,a$$

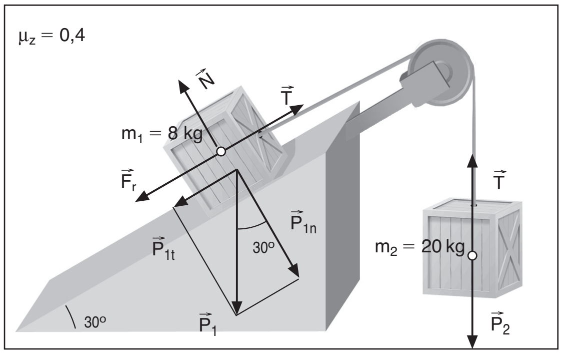
$$N = P - m\,a = 2\,744 \text{ N} - 280 \text{ kg} \cdot 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1\,904 \text{ N}$$

Indar normala kilopondetara bihurtuta:

$$1\,904 \cancel{\text{N}} \frac{\text{kp}}{9{,}8 \cancel{\text{N}}} = 194{,}3 \text{ kp}$$

Itxurazko pisua: 194,3 kp

7. *a)* Datuak:



Sistema eskuinerantz higitzen dela joko dugu. Newton-en bigarren legea aplikatuko diogu gorputz bakoitzari:

$$\begin{array}{ll} \text{1. gorputza:} & T - P_{1t} - F_r = m_1 a \\ \text{2. gorputza:} & P_2 - T = m_2 a \\ \hline \text{Batura} & P_2 - P_{1t} - F_r = (m_1 + m_2)\,a \end{array}$$

$$a = \frac{P_2 - P_{1t} - F_r}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{m_2 g - P_1 \sin\alpha - \mu_z P_1 \cos\alpha}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{g\,(m_2 - m_1 \sin\alpha - \mu_z m_1 \cos\alpha)}{m_1 + m_2}$$

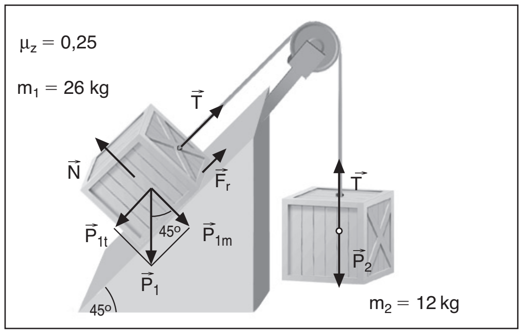
$$a = \frac{9{,}8 \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2} (20 \text{ kg} - 8 \text{ kg} \cdot \sin 30 - 0{,}4 \cdot 8 \text{ kg} \cdot \cos 30)}{20 \text{ kg} + 8 \text{ kg}} = 4{,}6 \text{ m/s}^2$$

Tentsioa kalkulatuko dugu:

$$T = P_2 - m_2 a = m_2 g - m_2 a = m_2 (g - a) =$$

$$= 20 \text{ kg} \left(9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 4{,}6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 103{,}4 \text{ N}$$

b) Datuak:



Sistema ezkerrerantz higitzen dela joko dugu, eta Newton-en bigarren legea aplikatuko diogu gorputz bakoitzari:

$$\begin{array}{ll} \text{1. gorputza:} & -T + P_{1t} - F_r = m_1 a \\ \text{2. gorputza:} & -P_2 + T = m_2 a \\ \hline \text{Batura} & -F_r + P_{1t} - P_2 = a(m_1 + m_2) \end{array}$$

$$a = \frac{-F_r + P_{1t} - P_2}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{-\mu_z m_1 g \cos\alpha + m_1 g \sin\alpha - m_2 g}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{g(m_1(-\mu_z \cos\alpha + \sin\alpha) - m_2)}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{9{,}8 \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2} (26 \text{ kg} (-0{,}25 \cos 45 + \sin 45) - 12 \text{ kg})}{26 \text{ kg} + 12 \text{ kg}} = 0{,}46 \text{ m/s}^2$$

Azkenik, tentsioa kalkulatuko dugu:

$$T = P_2 + m_2 a = m_2 (g + a) =$$

$$= 12 \text{ kg} \left(9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 0{,}46 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 123{,}1 \text{ N}$$

8. Datuak: $m = 2\,500 \text{ kg}$; $R = 60 \text{ m}$

$v = 54 \text{ km/h} = 15 \text{ m/s}$

Indar zentripetua pneumatikoen eta errepidearen arteko marruskadura-indarra da. Beraz:

$$F_r = m \frac{v^2}{R} = 2\,500 \text{ kg} \frac{\left(15 \dfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{60 \text{ m}} = 9\,375 \text{ N}$$

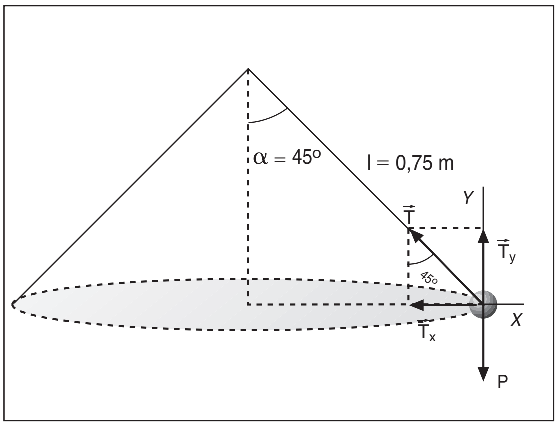
9. Datuak: $R = 100 \text{ m}$; $\mu_e = 0{,}12$

Automobila irrist ez egiteko moduko abiadura maximoan sartu dadin bihurgunean, marruskadura-indarrak —indar zentripetuaren berdina dena— maximoa izan behar du une horretan.

$$\mu_e N = m \frac{v^2}{R} \;;\; \mu_e \cancel{m} g = \cancel{m} \frac{v^2}{R}$$

$$v = \sqrt{\mu_e g R} = \sqrt{0{,}12 \cdot 9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 100 \text{ m}} = 10{,}8 \text{ m/s}$$

10. Datuak:



Bolaren biraketa-erradioa kalkulatuko dugu:

$$R = l \sin \alpha = 0{,}75 \text{ m} \cdot \sin 45° = 0{,}53 \text{ m}$$

Newton-en bigarren legea aplikatuko dugu, kontuan hartuta norabide erradialeko indar erresultantea indar zentripetua dela.

x ardatzaren norabidean: $T_x = F_c$; $T \sin \alpha = m \dfrac{v^2}{R}$

y ardatzaren norabidean: $T_y = P$; $T \cos \alpha = mg$

Bi berdintzen arteko zatiketa eginez:

$$\frac{\cancel{T} \sin \alpha}{\cancel{T} \cos \alpha} = \frac{v^2}{Rg} \; ; \; \text{tg}\, \alpha = \frac{v^2}{Rg}$$

Abiadura bakanduz:

$$v = \sqrt{Rg \,\text{tg}\, \alpha} = \sqrt{0{,}53 \text{ m} \cdot 9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{tg } 45°} = 2{,}3 \text{ m/s}$$

11. Datuak: $l = 0{,}45$ m ; $\alpha = 35°$

Biraketa-erradioa kalkulatuko dugu:

$$R = l \sin \alpha = 0{,}45 \text{ m} \sin 35° = 0{,}26 \text{ m}$$

Newton-en bigarren legea aplikatuko dugu, kontuan hartuta norabide erradialeko indar erresultantea indar zentripetua dela. Aurreko ariketan bezala jokatuz, formula hau lortuko dugu:

$$\text{tg}\, \alpha = \frac{v^2}{Rg}$$

Abiadura bakanduz:

$$v = \sqrt{Rg \,\text{tg}\, \alpha} = \sqrt{0{,}26 \text{ m} \cdot 9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \text{ tg } 35°} = 1{,}34 \text{ m/s}$$

Bolak bira osoa egiteko behar duen denbora kalkulatuko dugu, bizkortasunaren definiziotik abiatuta:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{2 \pi R}{v} = \frac{2\pi \cdot 0{,}26 \cancel{\text{m}}}{1{,}34 \dfrac{\cancel{\text{m}}}{\text{s}}} = 1{,}2 \text{ s}$$

ARIKETAK ETA PROBLEMAK

1. Autoak aurrera joan daitezke irrist egin gabe marruskadura-indar estatikoari esker. Beraz, autoak labain egin ez dezan elurretan ibiltzean, gurpilen marruskadura-koefiziente estatikoa handitu beharko dugu, eta horretarako, gurpilen gainazala zimurtsuago egin. Horixe lortzeko jartzen zaizkie kateak gurpilei, hain zuzen ere.

2. Ez. Ibilbide kurbo batean abiadura aldatuz doa; beraz, azelerazioa dago. Newton-en bigarren legearen arabera dakigunez, azelerazioak indarren ondorio dira. Horregatik, ez badago gorputzean eragiten duen indarrik, azelerazioa nulua izango da, eta higikariak higidura zuzena eta abiadura konstantekoa izango du, HZUa, alegia.

3. Datuak: $m = 10$ kg ; $F = 30$ N

Newton-en bigarren legea aplikatuz, eta hortik azelerazioa bakanduz:

$$F = ma$$

$$a = \frac{F}{\text{m}} = \frac{30 \text{ N}}{10 \text{ kg}} = 3 \text{ m/s}^2$$

4. Datuak: $m = 1$ kg ; $a = 2$ m/s^2

a) Indarra lortzeko, Newton-en bigarren legea aplikatuko dugu:

$$F = ma = 1 \text{ kg} \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 2 \text{ N}$$

b) Gorputzak egindako distantzia lortzeko, HZUAren ekuazioa aplikatuko dugu:

$$x = \frac{1}{2} a (t - \cancel{t_0})^2$$

$$x = \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (5 \text{ s})^2 = 25 \text{ m}$$

5. Datuak: $m = 12$ kg ; $\Delta v = v - v_0 = 20$ m/s

$\Delta t = t - t_0 = 5$ s

Lehenik, azelerazioa kalkulatuko dugu:

$$a = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \frac{20 \dfrac{\text{m}}{\text{s}}}{5 \text{ s}} = 4 \text{ m/s}^2$$

Ondoren, Newton-en bigarren legea aplikatuko dugu:

$$F = ma = 12 \text{ kg} \cdot 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 48 \text{ N}$$

6. Datuak: $m_1 = 54$ kg ; $\vec{F}_{12} = 162 \, \vec{i}$ N

$m_2 = 81$ kg ; $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} = -162 \, \vec{i}$ N

Newton-en bigarren legetik abiatuta, azelerazioaren balioa kalkulatuko dugu:

$$\vec{F}_{21} = m_1 \vec{a}_1$$

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_{21}}{m_1} = \frac{-162 \, \vec{i} \text{ N}}{54 \text{ kg}} = -3 \, \vec{i} \text{ m/s}^2$$

$$\vec{F}_{12} = m_2 \vec{a}_2$$

$$\vec{a}_2 = \frac{\vec{F}_{12}}{m_2} = \frac{162\ \vec{i}\ \mathrm{N}}{81\ \mathrm{kg}} = 2\ \vec{i}\ \mathrm{m/s^2}$$

Beraz, patinatzaileetako baten azelerazioak 3 m/s²-ko modulua izango du; bestearenak, 2 m/s²-koa, eta noranzkoak aurkakoak izango dira.

7. Datuak: $m = 40$ kg ; $F = 80$ N ; $\Delta t = 6$ s ; $v_0 = 0$ m/s

a) Amaierako abiadura kalkulatzeko, bulkadaren teorema aplikatuko dugu:

$$F\Delta t = m(v - v_0)$$

$$v = \frac{F\Delta t}{\mathrm{m}} = \frac{80\ \mathrm{N} \cdot 6\ \mathrm{s}}{40\ \mathrm{kg}} = 12\ \mathrm{m/s}$$

Ondoren, momentu lineala kalkulatuko dugu:

$$p = mv = 40\ \mathrm{kg} \cdot 12\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 480\ \mathrm{kg\ m/s}$$

b) Bulkada kalkulatuko dugu:

$$I = F\Delta t = 80\ \mathrm{N} \cdot 6\ \mathrm{s} = 480\ \mathrm{N \cdot s}$$

8. Datuak: $m = 0{,}3$ kg ; $\vec{v}_0 = 15\ \vec{i}$ m/s

$\vec{v} = -10\ \vec{i}$ m/s ; $F = 150$ N

Bulkadaren teorema aplikatuz:

$$\vec{F}\Delta t = m(\vec{v} - \vec{v}_0)$$

$$F\Delta t\, \vec{i} = m(v - v_0)\ \vec{i}$$

$$F\Delta t = m(v - v_0)$$

$$\Delta t = \frac{m(v - v_0)}{F} =$$

$$= 0{,}3\ \mathrm{kg}\ \frac{15\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - \left(-10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)}{150\ \mathrm{N}} = 0{,}05\ \mathrm{s}$$

9. *a)* Datuak: $m_1 = 62$ kg ; $\vec{v}_1 = 26\ \vec{i}$ m/s

$m_2 = 70$ kg ; $\vec{v}_2 = -12\ \vec{i}$ m/s

Momentu linealaren kontserbazioaren printzipioa aplikatuko dugu:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\,\vec{v}$$

$$m_1 v_1\, \vec{i} + m_2 v_2\, \vec{i} = (m_1 + m_2)\, v\, \vec{i}$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)\, v$$

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{62\ \mathrm{kg} \cdot 26\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 70\ \mathrm{kg} \cdot \left(-12\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)}{62\ \mathrm{kg} + 70\ \mathrm{kg}} = 5{,}8\ \mathrm{m/s}$$

Beraz, bi patinatzaileak 5,8 m/s-ko abiaduran higituko dira amaieran, lehena hasieran higitu den norabide eta noranzko berberetan.

10. Datuak: $m_a = 1{,}2$ kg

$m_j = 0{,}024$ kg

$\vec{v}_j = 500\ \vec{i}$ m/s

Momentu linealaren kontserbazioaren legea aplikatuko dugu:

$$0 = m_j\vec{v}_j + m_a\vec{v}_a$$

$$0 = m_j v_j\, \vec{i} + m_a v_a\, \vec{i}$$

$$0 = m_j v_j + m_a v_a$$

$$v_a = -\frac{m_j v_j}{m_a} = -\frac{0{,}024\ \mathrm{kg} \cdot 500\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{1{,}2\ \mathrm{kg}} = -10\ \mathrm{m/s}$$

Su-armaren abiadura 10 m/s-koa izan da, jaurtigaiak izan duen abiaduraren aurkako noranzkoan.

11. Datuak: $m_1 = 15$ kg ; $\vec{v}_1 = 10\ \vec{i}$ m/s

$m_2 = 8$ kg ; $\vec{v}_2 = 6\ \vec{i}$ m/s

Momentu linealaren kontserbazioaren legea aplikatuko dugu:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\,\vec{v}$$

$$m_1 v_1\, \vec{i} + m_2 v_2\, \vec{i} = (m_1 + m_2)\, v\, \vec{i}$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)\, v$$

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{15\ \mathrm{kg} \cdot 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 8\ \mathrm{kg} \cdot 6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{15\ \mathrm{kg} + 8\ \mathrm{kg}} = 8{,}6\ \mathrm{m/s}$$

Bi gorputzek batera izan duten abiadura 8,6 m/s-koa da, talka aurretik lehenengo gorputzak izan duen norabide eta noranzko berberetan.

12. Datuak: $m = 50$ kg

a) Indar normalaren modulua gorputzaren pisuaren berdina da.

$$N = mg = 50\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} = 490\ \mathrm{N}$$

b) Indar normalaren modulua gorputzaren pisuaren osagai normalaren berdina da.

$$N = mg\cos\alpha = 50\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} \cdot \cos 30° = 424{,}4\ \mathrm{N}$$

13. Datuak: $m = 15$ kg ; $F_e = 51{,}45$ N ; $F_z = 36{,}75$ N

a) Marruskadura-indar estatikoa gainditzeko indar minimoa 51,45 N-ekoa da. Beraz:

$$F_e = mg\,\mu_e$$

$$\mu_e = \frac{F_e}{mg} = \frac{51{,}45\ \mathrm{N}}{15\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}} = 0{,}35$$

b) Marruskadura-indar zinetikoa gainditzeko egin beharreko indarra 36,75 N-ekoa da. Beraz:

$$F_z = mg\,\mu_z$$

$$\mu_z = \frac{F_z}{mg} = \frac{36{,}75\ \text{N}}{15\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0{,}25$$

14. Datuak: $F = 100$ N ; $m = 20$ kg ; $\mu_z = 0{,}25$

a) Marruskadura-indarra kalkulatuko dugu:

$$F_r = mg\,\mu_z = 20\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}25 = 49\ \text{N}$$

b) Indarren erresultantea kalkulatuko dugu, kontuan izanda marruskadura-indarra higiduraren aurkakoa dela:

$$R = F - F_r = 100\ \text{N} - 49\ \text{N} = 51\ \text{N}$$

Newton-en bigarren legea aplikatuko dugu:

$$R = m\,a$$

$$a = \frac{R}{m} = \frac{51\ \text{N}}{20\ \text{kg}} = 2{,}5\ \text{m/s}^2$$

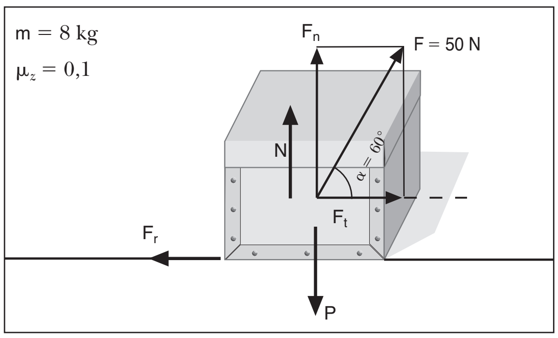
Beraz, azelerazioa 2,5 m/s²-koa izango da, eta aplikaturiko indarraren norabide eta noranzko berberak izango ditu.

c) HZUAren abiadura-ekuazioa aplikatuko dugu:

$$v = v_0 + at$$

$$v = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}} + 2{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3\ \text{s} = 17{,}5\ \text{m/s}$$

15. Datuak:



Lehenik, indar normala kalkulatuko dugu:

$$N = P - F_n = P - F\sin\alpha = mg - F\sin\alpha =$$

$$= 8\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 50\ \text{N}\sin 60° = 35{,}1\ \text{N}$$

Marruskadura-indarra kalkulatuko dugu:

$$F_r = N\mu_z = 35{,}1\ \text{N} \cdot 0{,}1 = 3{,}51\ \text{N}$$

Aplikaturiko indarrak gainazalarekiko norabide paraleloan duen osagaia kalkulatuko dugu:

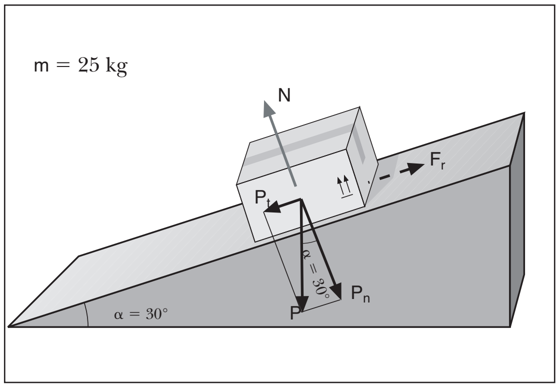
$$F_t = F\cos\alpha = 50\ \text{N} \cdot \cos 60° = 25\ \text{N}$$

Azkenik, indar erresultantea kalkulatu, eta Newton-en bigarren legea aplikatuko dugu, azelerazioa kalkulatzeko.

$$R = F_t - F_r = m\,a$$

$$a = \frac{F_t - F_r}{m} = \frac{25\ \text{N} - 3{,}51\ \text{N}}{8\ \text{kg}} = 2{,}7\ \text{m/s}^2$$

16. Datuak:



a) Marruskadurarik ezean, azelerazioa pisuaren osagai tangentzialaren ondorioa izango da:

$$R = P_t = mg\sin\alpha$$

Newton-en bigarren legea aplikatuz:

$$R = m\,a$$

$$\cancel{m}a = \cancel{m}g\sin\alpha$$

$$a = g\sin\alpha = 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\sin 30° = 4{,}9\ \text{m/s}^2$$

b) Kasu honetan, erresultantea honako hau izango da:

$$R = P_t - F_r = mg\sin\alpha - \mu\, mg\cos\alpha$$

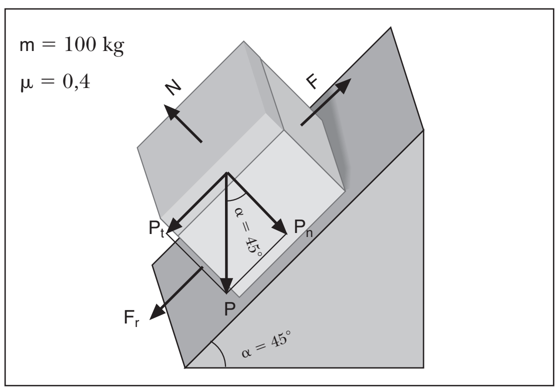
Newton-en bigarren legea aplikatuz:

$$R = m\,a$$

$$a = g\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) =$$

$$= 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\,(\sin 30° - 0{,}35 \cdot \cos 30°) = 1{,}9\ \text{m/s}^2$$

17. Datuak:



a) Indar normala kalkulatuko dugu:

$$N = mg\cos\alpha = 100\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \cos 45° = 693\ \text{N}$$

Marruskadura-indarra:

$$F_r = \mu\, N = 0{,}4 \cdot 693\ \text{N} = 277{,}2\ \text{N}$$

b) Gorputza abiadura konstantean igo dadin (azelerazio nulua), indarren erresultanteak nulua izan behar du:

$$R = F - P_t - F_r = 0\ ;\ F = F_r + P_t$$

$$F = \mu g m \cos\alpha + g m \sin\alpha =$$

$$= gm\,(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)$$

$$F = 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 100\ \text{kg}\ (0{,}4\cos 45° + \sin 45°) =$$

$$= 970{,}2\ \text{N}$$

Indarra pisuaren osagai tangentzialaren norabide berean baina aurkako noranzkoan aplikatu behar da, eta moduluak 970,2 N-ekoa izan behar du.

18. Datuak: $m = 3$ kg ; $\alpha = 30°$; $F = 50$ N ; $\mu = 0{,}3$

a) Lehenik, pisuaren osagai tangentziala kalkulatuko dugu:

$$P_t = mg\sin\alpha = 3\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin 30° = 14{,}7\ \text{N}$$

Ondoren, pisuaren osagai normala:

$$P_n = mg\cos\alpha = 3\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\ \cos 30° = 25{,}5\ \text{N}$$

b) Marruskadura-indarra kalkulatuko dugu:

$$F_r = \mu\, N = \mu\, P_n = 0{,}3 \cdot 25{,}5\ \text{N} = 7{,}6\ \text{N}$$

c) Azelerazioa lortzeko, lehenik Newton-en bigarren legea aplikatuko dugu:

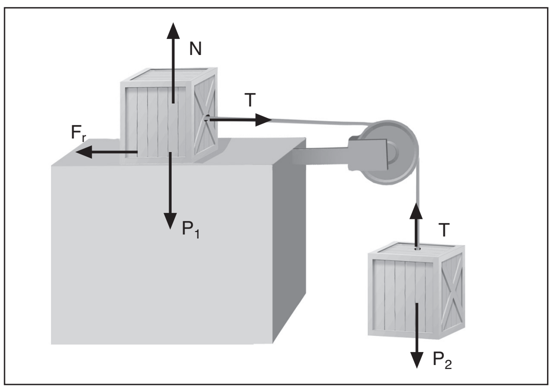
$$R = -P_t - F_r + F$$

$$ma = -P_t - F_r + F$$

$$a = \frac{-P_t - F_r + F}{m} =$$

$$= \frac{-14{,}7\ \text{N} - 7{,}6\ \text{N} + 50\ \text{N}}{3\ \text{kg}} = 9{,}2\ \text{m/s}^2$$

19. Datuak:



a) Newton-en bigarren legea aplikatuko diegu bi gorputzei:

$$\begin{array}{ll} \text{1. gorputza:} & T - F_r = m_1 a \\ \text{2. gorputza:} & P_2 - T = m_2 a \\ \hline \text{Batura} & P_2 - F_r = (m_1 + m_2)\, a \end{array}$$

Azelerazioa bakanduz:

$$a = \frac{P_2 - F_r}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 g - m_1 g \mu}{m_1 + m_2} =$$

$$= g\,\frac{(m_2 - m_1\,\mu)}{m_1 + m_2} =$$

$$= 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{(12\ \text{kg} - 20\ \text{kg} \cdot 0{,}5)}{12\ \text{kg} + 20\ \text{kg}} = 0{,}6\ \text{m/s}^2$$

b) Sokaren tentsioa kalkulatuko dugu:

$$T = P_2 - m_2 a = m_2 g - m_2 a = m_2\,(g - a) =$$

$$= 12\ \text{kg}\left(9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 0{,}6\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 110{,}3\ \text{N}$$

20. Datuak: $m_1 = 30$ kg ; $m_2 = 12$ kg

a) Atwood-en makinaren ekuazioa aplikatuko dugu azelerazioa lortzeko:

$$a = g\,\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} =$$

$$= 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{30\ \text{kg} - 12\ \text{kg}}{30\ \text{kg} + 12\ \text{kg}} = 4{,}2\ \text{m/s}^2$$

b) Dinamikaren funtsezko legea aplikatuko diogu lehen gorputzari:

$$P_1 - T = ma$$

$$T = P_1 - m_1 a = m_1\,(g - a) =$$

$$= 30\ \text{kg}\left(9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 4{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 168\ \text{N}$$

21. Datuak: $m = 2$ kg ; $R = 1$ m

$$\omega = 40\ \frac{\text{bira}}{\text{min}} \cdot \frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \text{bira}} \cdot \frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}} = 4{,}19\ \text{rad/s}$$

Lehenik, abiadura lineala lortuko dugu:

$$v = \omega R = 4{,}19\ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 1\ \text{m} = 4{,}19\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ondoren, Newton-en bigarren legea aplikatuko dugu, kontuan izanda sokaren tentsioa, *T,* indar zentripetuaren berdina dela:

$$T = F_z = m\,\frac{v^2}{R} = 2\ \text{kg}\ \frac{\left(4{,}19\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{1\ \text{m}} = 35{,}1\ \text{N}$$

22. Datuak: $m = 0{,}1$ kg ; $R = 1$ m ; $T = 2{,}5$ N

Sokaren tentsioa indar zentripetuaren berdina da:

$$T = F_z = m\frac{v^2}{h}$$

Abiadura bakanduz:

$$V = \sqrt{\frac{TR}{\text{m}}} = \sqrt{\frac{2{,}5\ \text{N} \cdot 1\ \text{m}}{0{,}1\ \text{kg}}} = 5\ \text{m/s}$$

23. Datuak: $m = 2\,400$ kg ; $R = 25$ m

$$v = 54\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 15\ \text{m/s}$$

Indar zentripetua kalkulatzeko, Newton-en bigarren legea aplikatuko dugu:

$$F_z = ma = m\frac{v^2}{R} = 2\,400\ \text{kg}\,\frac{\left(15\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{25\ \text{m}} = 21\,600\ \text{N}$$

24. Datuak: $R = 75$ m ; $\mu_e = 0{,}24$

Autoak irrist egin ez dezan, marruskadura-indarrak (indar zentripetuaren berdina) maximoa izan behar du:

$$F_r = F_z\ ;\ \mu_e \cancel{m} g = \cancel{m}\frac{v^2}{R}$$

$$v = \sqrt{\mu_e g R} = \sqrt{0{,}24 \cdot 9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 75\ \text{m}} = 13{,}3\ \text{m/s}$$

25. Datuak: $\vec{v}_{01} = 4{,}48\,\vec{i}\,\text{m/s}$; $\alpha = 60°$

$\vec{v}_{02} = -2{,}32\,\vec{i}\,\text{m/s}$; $\beta = -20°$

Momentu linealaren kontserbazioaren printzipioa aplikatuko dugu:

$$m\,\vec{v}_{01} + m\,\vec{v}_{02} = m\,\vec{v}_1 + m\,\vec{v}_2$$

$$\cancel{m}\,(\vec{v}_{01} + \vec{v}_{02}) = \cancel{m}\,(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$$

Ekuazio bektoriala bere osagaietan bananduta idatziko dugu:

$$v_{01}\,\vec{i} - v_{02}\,\vec{i} = v_1 \cos\alpha\,\vec{i} + v_1 \sin\alpha\,\vec{j} + v_2 \cos\beta\,\vec{i} + v_2 \sin\beta\,\vec{j}$$

x ardatza: $v_{01} - v_{02} = v_1 \cos\alpha + v_2 \cos\beta$

y ardatza: $0 = v_1 \sin\alpha + v_2 \sin\beta$

$$\begin{cases} 4{,}48\ \text{m/s} - 2{,}32\ \text{m/s} = v_1 \cos 60° + v_2 \cos(-20°) \\ 0 = v_1 \sin 60° + v_2 \sin(-20°) \end{cases}$$

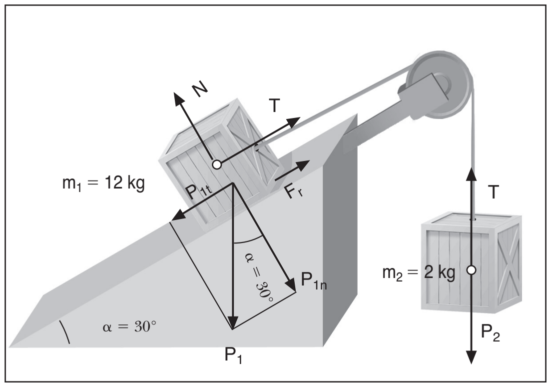
$$\begin{cases} 2{,}16\ \text{m/s} = 0{,}5\,v_1 + 0{,}9397\,v_2 \\ 0 = 0{,}8660\,v_1 - 0{,}3420\,v_2 \end{cases}$$

Sistemak soluzio hauek ditu:

$$v_1 = 0{,}75\ \text{m/s} \quad \text{eta} \quad v_2 = 1{,}90\ \text{m/s}$$

Lehenengo bolaren amaierako abiaduraren modulua 1,9 m/s-koa da, eta bigarrenaren abiaduraren modulua, 0,75 m/s-koa.

26. Datuak:



Sistema ezkerrerantz higitzen dela suposatuko dugu. Bi gorputzei Newton-en bigarren legea aplikatuz:

$$\begin{array}{ll} \text{1. gorputza:} & P_{1t} - T - F_r = m_1 a \\ \text{2. gorputza:} & T - P_2 = m_2 a \\ \hline \text{Batura} & P_{1t} - F_r - P_2 = a(m_1 + m_2) \end{array}$$

$$a = \frac{P_{1t} - F_r - P_2}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{m_1 g \sin\alpha - \mu\, m_1 g \cos\alpha - m_2 g}{m_1 + m_2} =$$

$$= g\,\frac{m_1(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - m_2}{m_1 + m_2} =$$

$$= 9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{12\ \text{kg}\,(\sin 30 - 0{,}2\cos 30) - 2\ \text{kg}}{12\ \text{kg} + 2\ \text{kg}}$$

$$a = 1{,}3\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Tentsioa lortzeko, Newton-en bigarren legea aplikatuko diogu bigarren gorputzari:

$$T = m_2 a + P_2 = m_2(a + g) =$$

$$= 2\ \text{kg}\left(1{,}3\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 22{,}2\ \text{N}$$

27. Datuak: $m_1 = 15$ kg ; $m_2 = 10$ kg ; $\alpha = 20°$

a) Sistema eskuinerantz higitzen dela joko dugu.

Newton-en bigarren legea aplikatuko diegu bi gorputzei:

$$\begin{array}{ll} \text{1. gorputza:} & T - P_{1t} = m_1 a \\ \text{2. gorputza:} & P_2 - T = m_2 a \\ \hline \text{Batura} & P_2 - P_{1t} = a(m_1 + m_2) \end{array}$$

$$a = \frac{P_2 - P_{1t}}{m_1 + m_2} = g\,\frac{m_2 - m_1 \sin\alpha}{m_1 + m_2} =$$

$$= 9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{10\ \text{kg} - 15\ \text{kg} \cdot \sin 20°}{15\ \text{kg} + 10\ \text{kg}} = 1{,}9\ \text{m/s}^2$$

Azkenik, tentsioa kalkulatuko dugu:

$$T = P_2 - m_2 a = m_2 (g - a) =$$
$$= 10\ \text{kg} \left(9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 1{,}9\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 79\ \text{N}$$

b) Sistema eskuinerantz higitzen dela joko dugu.

Newton-en bigarren legea aplikatuko diegu bi gorputzei:

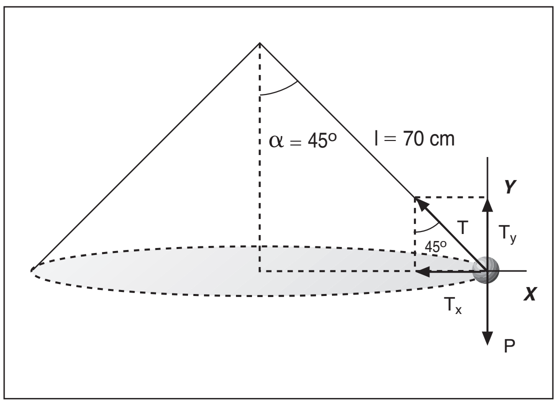
$$\begin{array}{ll} \text{1. gorputza:} & T - P_{1\,t} - F_r = m_1 a \\ \text{2. gorputza:} & P_2 - T = m_2 a \\ \hline \text{Batura} & P_2 - P_{1\,t} - F_r = a\,(m_1 + m_2) \end{array}$$

$$a = \frac{P_2 - P_{1\,t} - F_r}{m_1 + m_2} =$$
$$= g\,\frac{m_2 - m_1 (\sin\alpha + \mu \cos\alpha)}{m_1 + m_2} =$$
$$= 9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{10\ \text{kg} - 15\ \text{kg}\,(\sin 20° + 0{,}3 \cos 20°)}{10\ \text{kg} + 15\ \text{kg}} =$$
$$= 0{,}25\ \text{m/s}^2$$

Azkenik, tentsioa kalkulatuko dugu:

$$T = P_2 - m_2 a = m_2 (g - a) =$$
$$= 10\ \text{kg} \left(9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 0{,}25\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 95{,}5\ \text{N}$$

28. Datuak:



Lehenik, biraketa-erradioa lortuko dugu:

$$R = l \sin\alpha = 0{,}7\ \text{m} \cdot \sin 45° = 0{,}5\ \text{m}$$

Ondoren, Newton-en bigarren legea aplikatuko dugu, kontuan izanda norabide erradialeko indar erresultantea indar zentripetua dela.

x ardatza: $T_x = F_z$; $T \sin\alpha = \dfrac{m v^2}{R}$

y ardatza: $T_y = P$; $T \cos\alpha = m g$

Bi berdintza horiek atalez atal zatituz:

$$\frac{\cancel{T} \sin\alpha}{\cancel{T} \cos\alpha} = \frac{\dfrac{\cancel{m} v^2}{R}}{\cancel{m} g}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{v^2}{R g}$$

a) Abiadura bakanduz lortu dugun adierazpenean:

$$v = \sqrt{R g\, \text{tg}\,\alpha} =$$
$$= \sqrt{0{,}5\ \text{m} \cdot 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{tg}\ 45°} = 2{,}2\ \text{m/s}$$

b) Bolak bira osoa egiteko behar duen denbora, bizkortasunaren definiziotik kalkulatuko dugu:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{2\,\pi\,R}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 0{,}5\ \text{m}}{2{,}2\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}} = 1{,}4\ \text{s}$$

c) Lehenik, abiadura angeluarra kalkulatuko dugu:

$$\omega = \frac{V}{R} = \frac{2{,}2\ \dfrac{\cancel{\text{m}}}{\text{s}}}{0{,}5\ \cancel{\text{m}}} = 4{,}4\ \text{rad/s}$$

Abiadura angeluarra bira minutuko unitatetan idatziko dugu, horretarako bihurketa-faktore egokiak erabiliz:

$$4{,}4\ \frac{\cancel{\text{rad}}}{\cancel{\text{s}}} \cdot \frac{1\ \text{bira}}{2\,\pi\ \cancel{\text{rad}}} \cdot \frac{60\ \cancel{\text{s}}}{1\ \text{min}} = 42\ \frac{\text{bira}}{\text{min}}$$

Bolak 42 bira egiten ditu minutu batean.