

- a) A eta B puntuetako potentzialak kalkulatuko ditugu:

$$V_A = V_{1A} + V_{2A} + V_{3A} = K \left[ \frac{Q_1}{d_{1A}} + \frac{Q_2}{d_{2A}} + \frac{Q_3}{d_{3A}} \right] =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \left[ \frac{10^{-6} \text{ C}}{0,3 \text{ m}} + \frac{2 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{0,52 \text{ m}} - \frac{10^{-6} \text{ C}}{0,3 \text{ m}} \right] =$$

$$= 3,46 \cdot 10^4 \text{ V}$$

$$V_B = V_{1B} + V_{2B} + V_{3B} = K \left[ \frac{Q_1}{d_{1B}} + \frac{Q_2}{d_{2B}} + \frac{Q_3}{d_{3B}} \right] =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \left[ \frac{10^{-6} \text{ C}}{0,3 \text{ m}} + \frac{2 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{0,3 \text{ m}} - \frac{10^{-6} \text{ C}}{0,52 \text{ m}} \right] =$$

$$= 7,27 \cdot 10^4 \text{ V}$$

Horietatik, potentzial-diferentzia lortuko dugu:

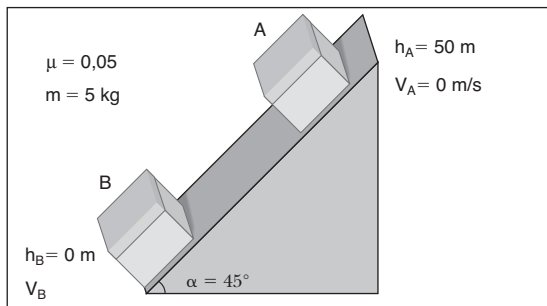
$$V_B - V_A = 7,27 \cdot 10^4 \text{ V} - 3,46 \cdot 10^4 \text{ V} = 3,81 \cdot 10^4 \text{ V}$$

b)

$$W_{A \rightarrow B} = q (V_B - V_A) =$$

$$= -5 \cdot 10^{-6} \text{ C} \cdot 3,81 \cdot 10^4 \text{ V} = -0,19 \text{ J}$$

3. Datuak:



- a) Lehenik, ibilitako distantzia kalkulatuko dugu:

$$\sin \alpha = \frac{h_A - h_B}{\Delta r}$$

$$\Delta r = \frac{h_A - h_B}{\sin \alpha} = \frac{50 \text{ m} - 0 \text{ m}}{\sin 45^\circ} = 70,7 \text{ m}$$

Galduriko energia eta marruskadura-indarrak egindako lana berdinak dira.

$$W_{\text{Fz-kon}} = \Delta Em = Em_B - Em_A$$

$$W_{F_r} = \left( \frac{1}{2} m v_B^2 + 0 \right) - (0 + mgh_A)$$

$$-\mu mg \cos \alpha \Delta r = \frac{1}{2} m v_B^2 - mgh_A$$

$$\frac{1}{2} v_B^2 = \cancel{m} g (h_A - \mu \cos \alpha \Delta r)$$

$$v_B = \sqrt{2 g (h_A - \mu \cos \alpha \Delta r)}$$

$$v_B = \sqrt{2 \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (50 \text{ m} - 0,05 \cdot \cos 45^\circ \cdot 70,7 \text{ m})} =$$

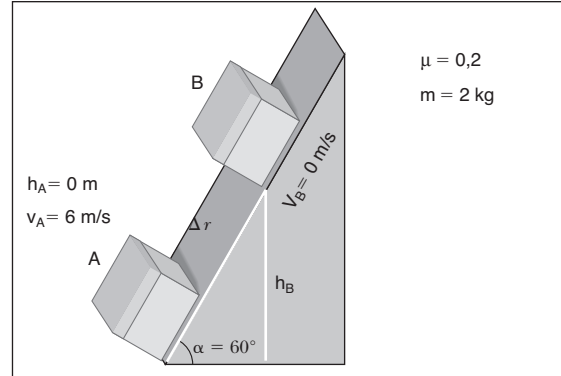
$$= 30,5 \text{ m/s}$$

- b) Marruskaduraren ondorioz galdutako energia:

$$|W_{F_r}| = \mu mg \cos \alpha \Delta r =$$

$$= 0,05 \cdot 5 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \cos 45^\circ \cdot 70,7 \text{ m} = 122,5 \text{ J}$$

4. Datuak:



- a) Gorputza gelditu egiten denez, amaierako energia zinetikoa nulua izango da.

Galdutako energia marruskadura-indarrak egindako lanaren berdina da.

$$W_{\text{Fz-kon}} = \Delta Em = Em_B - Em_A$$

$$W_{F_r} = (0 + mgh_B) - \left( \frac{1}{2} m v_A^2 + 0 \right)$$

$$-\mu mg \cos \alpha \Delta r = mgh_B - \frac{1}{2} m v_A^2$$

$$\cancel{m} gh_B = \cancel{m} \left( \frac{1}{2} v_A^2 - \mu g \cos \alpha \Delta r \right)$$

Altueraren eta ibilitako luzeraren arteko erlazioa kalkulatuko dugu:

$$\sin \alpha = \frac{h_B}{\Delta r} ; h_B = \Delta r \sin \alpha$$

Lortutako balio hori energiaren ekuazioan idatziko dugu, eta ondoren, ibilitako luzera bakandu.

$$g \Delta r \sin \alpha = \frac{1}{2} v_A^2 - \mu g \cos \alpha \Delta r$$

$$\Delta r = \frac{v_A^2}{2 g (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)} =$$

$$= \frac{\left( 6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2}{2 \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (\sin 60^\circ + 0,2 \cos 60^\circ)} = 1,9 \text{ m}$$

- b) Marruskaduraren ondorioz galdutako energia kalkulatuko dugu:

$$|W_{F_r}| = \mu mg \cos \alpha \Delta r =$$

$$= 0,2 \cdot 2 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \cos 60^\circ \cdot 1,9 \text{ m} = 3,7 \text{ J}$$

5. Datuak:  $m = 3 \text{ kg}$  ;  $\mu = 0,2$

Gorputza  $A$  puntutik erortzen utzi dutenez, eta  $B$  puntura abiadura nuluan iritsi denez,  $A$  eta  $B$  puntuetako energia zinetikoak nulua dira.

Galdutako energia marruskadura-indarrak eginiko lanaren berdina da.

$$W_{\text{fric-kon}} = \Delta E_m = E_{m_B} - E_{m_A}$$

$$W_{F_r} = (0 + mgh_B) - (0 + mgh_A)$$

$$-\mu N_A \Delta r_A - \mu N_B \Delta r_B = mgh_B - mgh_A$$

Bi aldapetako indar normalak honako hauek dira:

$$N_A = mg \cos 60^\circ$$

$$N_B = mg \cos 30^\circ$$

Aldapa bakoitzean ibilitako distantzia:

$$\Delta r_A = \frac{h_A}{\sin 60^\circ}$$

$$\Delta r_B = \frac{h_B}{\sin 30^\circ}$$

Lortu ditugun balio horiek energiaren ekuazioan ordeztuz:

$$-\mu mg \frac{\cos 60^\circ}{\sin 60^\circ} h_A - \mu mg \frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} h_B = mgh_B - mgh_A$$

$$-\mu \cancel{mg} (\cotg 60^\circ h_A + \cotg 30^\circ h_B) = \cancel{mg} (h_B - h_A)$$

$B$  puntuko altuera bakanduko dugu:

$$h_B = h_A \frac{1 - \mu \cotg 60^\circ}{1 + \mu \cotg 30^\circ}$$

Azkenik, datuak ordeztuz:

$$h_B = 10 \text{ m} \frac{1 - 0,2 \cotg 60^\circ}{1 + 0,2 \cotg 30^\circ} = 6,6 \text{ m}$$

Gorputza 6,6 m-ko altuerara iritsi da. (Azpimarratu beharrekoa da emaitzak ez duela zerikusirik gorputzaren masaren balioarekin.)

## ARIKETAK ETA PROBLEMAK

1. Energia mekanikoa (zinetikoa, potentzial grabitatorioa eta potentzial elastikoa), energia elektrikoa, energia nuklearra, energia termikoa, energia kimikoa eta energia erradiatzailea.

Energia nuklearra energia elektriko bihurtzen da zentral nuklearretan. Era berean, energia elektrikoa energia termiko bihurtzeko daiteke (berogailu elektrikoan, adibidez), baita energia erradiatzailea ere (irradi-aparatuetan edo bonbilla batean, adibidez) edo energia mekaniko (motor elektrikoetan gertatzen denez), etab.

2. — Gezurra. Esate baterako, lanpara bati esekita eusteko, beharrezkoa da indarra egitea, baina indar horrek ez du lanik egiten, eta izan ere, lanpara ez da higitzen.

— Gezurra. Lanaren balioa, aplikatu den indarraren arabera da, baina baita gorputzak desplazatzen

tzean hartutako norabidearen arabera ere. Indarrak desplazamenduaren norabide eta noranzko berberak dituenean, lana maximoa da, eta perpendikularra bada desplazamendurekiko, lana nulua da.

3. — Ezin liteke, ez masa, ez abiaduraren karratua, ez dirrelako negatiboak. Gainera, ez luke zentzurik, zeren gorputz batek izan dezakeen energia zinetiko txikiena, geldidagoenean duena, hain zuzen ere, zero baita.

— Bai, zeren, energiaren jatorritzat zer puntu hartu, horren arabera izango baita energia potentzialaren balioa. Adibidez, energia potentzialaren jatorria mahai baten gainaldean kokatuz gero, lurrean dagoen gorputz batek energia potentzial grabitatorio negatiboa izango du.

4. Indar kontserbakor batek itzuli egin dezake, osorik, beste indar batek, kanpoko eta aurkako zeinua duenak, haren gainean egin duen lana. Lan hori energia potentzial gisa gordetzen da.

Adibideak: indar grabitatorioak eta indar elektrikoak.

5. Bai. Hala gertatzen da, hain zuzen ere, gainazal ekuipotential bateko bi punturen artean; esate baterako, zentroa karga isolatu batean duen zirkunferentzia bateko bi punturen artean.

6. Datuak:  $\Delta x = 7 \text{ m}$  ;  $F = 175 \text{ N}$

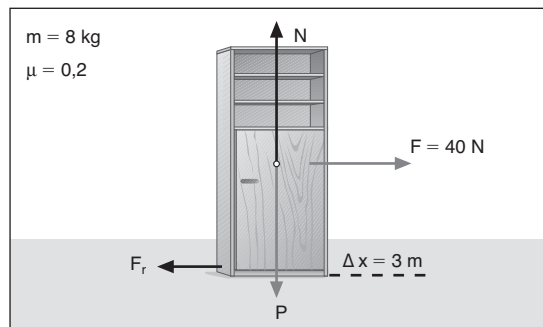
a) Lana kalkulatu dugu:

$$W = |F| \Delta x = 175 \text{ N} \cdot 7 \text{ m} = 1225 \text{ J}$$

b) Lana kalkulatu dugu:

$$W = F \Delta x \cos \alpha = 175 \text{ N} \cdot 7 \text{ m} \cdot \cos 25^\circ = 1110,2 \text{ J}$$

7. Datuak:



$F$  indarrak egindako lana kalkulatu dugu:

$$W_F = F \Delta x \cos 0^\circ = 40 \text{ N} \cdot 3 \text{ m} \cdot \cos 0^\circ = 120 \text{ J}$$

Bai pisuak, bai normalak egindako lanak nulua dira, indar horiek perpendikularrak direlako ibilbidearekiko. Horren arabera:

$$W_P = P \Delta x \cos 90^\circ = 0 \text{ J}$$

$$W_N = N \Delta x \cos 90^\circ = 0 \text{ J}$$

Marruskadura-indarra eta haren lana kalkulatu:

$$F_r = \mu N = \mu mg = 0,2 \cdot 8 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 15,7 \text{ N}$$

$$W_{F_r} = F_r \Delta x \cos 180^\circ = 15,7 \text{ N} \cdot 3 \text{ m} (-1) = -47 \text{ J}$$

Indar erresultantea eta haren lanaren balioa kalkulatu ditugu:

$$R = F - F_r = 40 \text{ N} - 15,7 \text{ N} = 24,3 \text{ N}$$

$$W_R = R \Delta x \cos 0^\circ = 24,3 \text{ N} \cdot 3 \text{ m} \cdot \cos 0^\circ = 73 \text{ J}$$

Ikusten denez, indar erresultanteak egindako lana eta beste indarrek egindako lanen batura berdinak dira:

$$W_R = W_F + W_{F_r}$$

$$73 \text{ J} = 120 \text{ J} - 47 \text{ J}$$

8. Lanaren balioa: grafikoak eta X ardatzak  $x = 0 \text{ m}$  puntutik  $x = 0,2 \text{ m}$  puntura bitartean mugatzen duten irudiaren azalera.

(0, 5), (20, 5) eta (20, 15) puntuek eratzen duten triangeluaren azalera kalkulatu dugu:

$$A_1 = \frac{1}{2} b_1 h_1 = \frac{1}{2} 0,2 \text{ m} \cdot 10 \text{ N} = 1 \text{ J}$$

(0, 0), (20, 0), (20, 5) eta (0,5) puntuek eratzen duten laukizuzenaren azalera kalkulatu dugu:

$$A_2 = b_2 h_2 = 0,2 \text{ m} \cdot 5 \text{ N} = 1 \text{ J}$$

Lan totalaren balioa, beraz:

$$W = A_1 + A_2 = 1 \text{ J} + 1 \text{ J} = 2 \text{ J}$$

9. Datuak:  $m = 4 \text{ kg}$  ;  $h = 40 \text{ m}$  ;  $\alpha = 30^\circ$

- a) Hasieran, energia zinetikoa nulua izan da; beraz, energia mekanikoaren balioa energia potentzialarena izan da:

$$\begin{aligned} Em_A &= E_{\cancel{A}} + Ep_A = mgh = \\ &= 4 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 40 \text{ m} = 1568 \text{ J} \end{aligned}$$

- b) Energia mekanikoaren kontserbazioaren ekuazioa erabiliz, gorputzak 10 m-ko altuerako puntuan (B) izan duen abiadura kalkulatu dugu:

$$Em_B = Em_A$$

$$\cancel{m}gh_B + \frac{1}{2} \cancel{m}v_B^2 = \cancel{m}gh_A$$

$$v_B = \sqrt{2g(h_A - h_B)} =$$

$$= \sqrt{2 \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (40 \text{ m} - 10 \text{ m})} = 24,2 \text{ m/s}$$

Ohartzekoa da gorputzaren abiadurak, B puntuan, ez duela zerikusirik ez masarekin, ez planoaren maldarekin, eta hala da grabitate-indarra kontserbakorra delako.

- c) Aplikatu dugu berriro energia mekanikoaren kontserbazioaren printzipioa, bigarren horretan hasierako puntutik (A puntua) lurrera (C puntua) bitartean:

$$h_C = 0 \text{ m}$$

$$Em_C = Em_A$$

$$\frac{1}{2} m v_C^2 = mgh_A$$

$$v_C = \sqrt{2gh_A} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 40 \text{ m}} = 28 \text{ m/s}$$

10. a) Datuak:  $m = 300 \text{ kg}$  ;  $\Delta x = 10 \text{ m}$  ;  $\Delta t = 10 \text{ s}$

Potentzia kalkulatu dugu:

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{F \Delta x}{\Delta t} = \frac{mg \Delta x}{\Delta t} =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{300 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10 \text{ m}}{10 \text{ s}} = 2940 \text{ W} \end{aligned}$$

- b) Datuak:  $m = 300 \text{ kg}$

$$v = \frac{30 \text{ m}}{1 \text{ min}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Potentziaren balioa:

$$\begin{aligned} P = Fv &= mgv = 300 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \\ &= 1470 \text{ W} \end{aligned}$$

11. Datuak:  $m = 5 \text{ kg}$  ;  $l = 2 \text{ m}$  ;  $F = 20 \text{ N}$

- a) Indarra aplikatu dugu muturretik bermapuntura dagoen distantzia indar eragilearen besoa da,  $x$  letraz adieraziko duguna.

Makina bakunen lege orokorra aplikatu:

$$Fx = R(2 \text{ m} - x)$$

$$x = \frac{2R}{F + R}$$

Indar erresistentea gorputzaren pisua da,  $P$ :

$$\begin{aligned} x &= \frac{2P}{F + P} = \frac{2mg}{F + mg} = \\ &= \frac{2 \cdot 5 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{20 \text{ N} + 5 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 1,42 \text{ m} \end{aligned}$$

- b) Abantaila mekanikoa kalkulatu dugu:

$$\text{Abantaila mekanikoa} = \frac{R}{F} = \frac{mg}{F} =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{5 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{20 \text{ N}} = 2,45 \end{aligned}$$

12. Datuak:  $m = 6 \text{ kg}$  ;  $\alpha = 30^\circ$  ;  $h_A = 6 \text{ m}$  ;  $\mu = 0,3$

- a) Hasieran gorputza geldi zegoenez, energia zinetikoa nulua izan da:

$$Em_A = Ep_A + E_{\cancel{A}} = Ep_A = mgh_A =$$

$$= 6 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 6 \text{ m} = 352,8 \text{ J}$$

b) Gorputzak egindako bidea kalkulatu dugu:  $\Delta r$ :

$$\sin \alpha = \frac{h}{\Delta r}$$

$$\Delta r = \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{6 \text{ m}}{\sin 30^\circ} = 12 \text{ m}$$

Marruskadura-indarra eta haren lanaren balioa kalkulatu ditugu:

$$F_r = \mu mg \cos \alpha =$$

$$= 0,3 \cdot 6 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \cos 30^\circ = 15,3 \text{ N}$$

$$W_{F_r} = F_r \Delta r \cos \varphi =$$

$$= 15,3 \text{ N} \cdot 12 \text{ m} \cdot \cos 180^\circ = -183,3 \text{ J}$$

Eraitza negatiboak adierazten duenez, gorputzak 183,3 J-eko energia galdu du marruskaduraren ondorioz.

c) Galdutako energia marruskadura-indarrak egindako lanaren berdina da:

$$W_{F_{ez-kon}} = \Delta Em = Em_B - Em_A$$

$$W_{F_r} = \left( \frac{1}{2} m v_B^2 + 0 \right) - (0 + mgh_A)$$

$$v_B = \sqrt{\frac{2}{m} (mgh_A + W_{F_r})} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{6 \text{ kg}} (352,8 \text{ J} - 183,3 \text{ J})} = 7,5 \text{ m/s}$$

13.  $Q_1$ -en eta  $d_1$ -en balioak A1:B1 gelaxketan sar ditzakegu, hurrenez hurren. A2 gelaxkan,  $Q_2$ -ren balioa sartuko dugu, eta B2-n, formula hau: =1-B1.

a) C1 gelaxkan,  $V_1$  potentzial elektrikoa kalkulatzeko formula sartuko dugu:

$$=9*10^9*A1/B1$$

C2 gelaxkan,  $V_2$  potentzial elektrikoaren formula idatziko dugu:

$$=9*10^9*A2/B2$$

b) Potentzial elektrikoa nulua da  $Q_1$ -ek eta  $Q_2$ -k aurkako zeinua badute eta erlazio hau betetzen badute:

$$\frac{Q_1}{d_1} = -\frac{Q_2}{d_2}$$